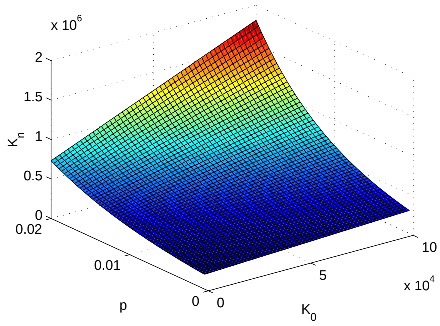
Anwendung: Zinseszinsformel

$$K_n = K_0(1+p)^n + E\frac{(1+p)^n - 1}{p}$$

eingehende Größen:

K_0	Anfangskapital
K_n	Endkapital
n	Anzahl der Zeitintervalle
p	Zinssatz (pro Zeitintervall)
E	Einzahlung (pro Zeitintervall)

Die Abhängigkeit des Endkapitals K_n vom Anfangskapital K_0 und vom Zinssatz p (bei fixiertem E und n) läßt sich wie folgt graphisch darstellen:



Auflösung der Zinseszinsformel nach den eingehenden Größen

Anfangskapital:

$$K_0 = \frac{pK_n - E((1+p)^n - 1)}{p(1+p)^n}$$

Einzahlung:

$$E = \frac{p(K_n - K_0(1+p)^n)}{(1+p)^n - 1}$$

Zeitindex:

$$n = \frac{\ln|pK_n + E| - \ln|pK_0 + E|}{\ln(1+p)}$$

Zinssatz (nur für $E = 0$):

$$p = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

Unbekannter Zinssatz

Multiplikation der Zinseszinsformel mit dem Nenner p des Einzahlungsterms führt bei $E \neq 0$ auf eine Polynomgleichung $(n+1)$ten Grades, die für sinnvolle n i. a. nicht analytisch lösbar ist.
Mit $x = p$ und

$$f(x) = [K_n - K_0(1+x)^n]x - E[(1+x)^n - 1]$$

ist die Nullstelle x^* von $f(x)$ zu finden.
Für Zinseszinsaufgaben ist leicht ein sinnvoller erster Näherungswert x_0 für x^* angebbar (*initial guess*)

Dieser wird dann iterativ verbessert, d. h. es wird eine Folge generiert, deren Grenzwert x^* ist.

Effektive Verfahren: Bisektion, Newtonverfahren (siehe Differentialrechnung),
$\exists$ nutzerfreundliche TR- und Computermethoden

Eine einfache Lösungsmethode basiert auf der Fixpunktform:
Wir formen die Gleichung um in die Form

$$x = \varphi(x)$$

Unter gewissen Bedingungen konvergiert die Folge $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ mit

$$x_i = \varphi(x_{i-1}) \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

gegen x_* – die Lösung von $x = \varphi(x)$ wie $f(x) = 0$.

Umstellen nach x

Es gibt zwei naheliegende Varianten, die Gleichung $f(x) = 0$ nach x umzustellen, es bleibt aber jeweils ein x-abhängiger Term auf der rechten Seite.

Variante 1 stellt zuerst nach $(1+x)^n$ um, woraus x durch Radizieren und Subtraktion von 1 bestimmt wird.
Variante 2 stellt nach dem x hinter der eckigen Klammer um.
Anwendung der Fixpunktiteration und Rückkehr zur Bezeichnung p für die Unbekannte liefert die Iterationsvorschriften (Rekursionsformeln):

$$p_i = \sqrt[n]{\frac{p_{i-1}K_f + E}{p_{i-1}K_0 + E}} - 1$$

bzw. alternativ mit $q = (1 + p_{i-1})^n$

$$p_i = E\frac{q-1}{K_f - qK_0}.$$

Bemerkung:

Es konvergiert jeweils eine der beiden Varianten.
(bei Ansparen die erste, bei Kredit und Rente die zweite)

Beispiele zu unbekanntem Zinssatz

Ansparen ($K_0 = 0,\ E > 0$)

Anfangskapital	$K_0 = 25000$
Endkapital	$K_n = 320000$
Anzahl der Raten	$n = 120$
Einzahlungsbetrag	$E = 1500$

Erste Variante (hier konvergent)

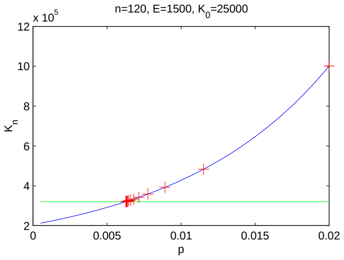
$$p_i = \sqrt[n]{\frac{p_{i-1}K_n + E}{p_{i-1}K_0 + E}} - 1$$

Startwert: $p_1 = 0.02$

$$p_2 = \sqrt[120]{\frac{0.02 \cdot 320000 + 1500}{0.02 \cdot 25000 + 1500}} - 1$$

$$p_2 = 0.115134$$

analog: $p_3 = 0.00891137$ $\qquad p_{25} = 0.00626269$



Die Folge konvergiert sowohl bei zu kleinem als auch bei zu großem Startwert.

Fortsetzung des Beispiels

Zweite Variante (hier divergent)

$$p_i = E\frac{q-1}{K_n - qK_0}\,.$$

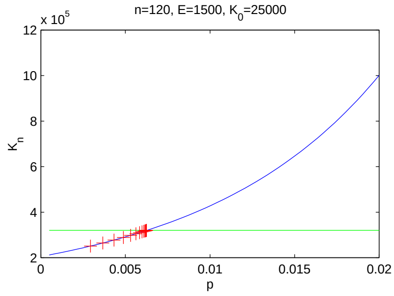
mit $q = (1 + p_{i-1})^n$

Startwert: $p_1 = 0.00625$

$$p_2 = 1500\frac{(1+0.00625)^{120} - 1}{320000 - (1+0.00625)^{120} \cdot 25000}$$

$p_2 = 0.0062429156$

$p_3 = 0.0062318626$ $\qquad p_{25} = 0.000042359$



Bei ungünstiger Fixpunktgleichung divergiert die Folge der „Näherungen“ selbst bei sehr guten Startwerten.

Rente mit 60:

($K_0 > 0,\ E < 0$)

Anfangskapital	$K_0 = 500000$
Endkapital	$K_n = 0$
Anzahl der Raten	$n = 360$
Einzahlungsbetrag	$E = -2500$ (Auszahlung)

Hier konvergiert Variante 2:

$$p_i = E\frac{q_i - 1}{K_n - q_iK_0}\,.$$

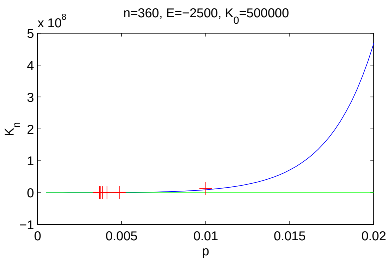
mit $q_i = (1 + p_{i-1})^n$

Startwert: $p_1 = 0.01$

$$p_2 = -2500\frac{(1+0.01)^{360} - 1}{0 - (1+0.01)^{360} \cdot 500000}$$

$p_2 = 0.0048609166$

$p_3 = 0.0041273778$ $\qquad p_{25} = 0.0036559280$



Anwendung zu Folgen und Reihen: Marktmodell

Nachfrage x (fällt mit steigendem Preis p)

$$x = a - bp \quad ; \quad b > 0$$

Produktion im neuen Zyklus x^{neu}
(wächst mit dem Preis)

$$x^{neu} = c + dp \quad ; \quad d > 0$$

keine Lagermöglichkeit, erzwingt Preis

$$p = -\frac{x-a}{b} = \frac{a-x}{b}$$

dieser führt zu Neuproduktion x^{neu}

$$x^{neu} = c + d\frac{a-x}{b} = c + \frac{ad}{b} - \frac{d}{b}x$$

$\Rightarrow$ rekursiv definierte Folge von Produktionsmengen

$$x^{(0)}; \quad x^{neu} = c + \frac{ad}{b} - \frac{d}{b}x =: \alpha + \beta x$$

$|\beta| < 1 \overset{(Banach)}{\Rightarrow}$ Konvergenz gegen Fixpunkt

$$x^* = \alpha + \beta x^* = \frac{\alpha}{1-\beta} = \frac{(bc+ad)}{b+d}$$

x^* =Gleichgewichtsmenge

$\rightarrow$ Gleichgewichtspreis $p^* = \frac{a-x^*}{b}$

$|\beta| > 1 \Rightarrow$ Instabilität: Abweichungen vom Gleichgewicht wachsen geometrisch an

Bemerkung

$|\beta| < 1 \Leftrightarrow d < b$ Kunden reagieren stärker als Produzenten $\rightarrow$ stabil

$|\beta| > 1 \Leftrightarrow d > b$ Produzenten überreagieren $\rightarrow$ instabil

Störung des Gleichgewichts: $\Delta = x - x^*$

$\Delta^{(k+1)} = \alpha + \beta x^{(k)} - x^* = \alpha + \beta(\Delta^{(k)} + x^*)$

$\Rightarrow \Delta^{(k+1)} = \beta\Delta^{(k)} = -\frac{d}{b}\Delta^{(k)}$

Induktion $\rightarrow \Delta^{(k)} = (-\frac{d}{b})^k \Delta^{(0)}$

(geometrische Folge)